

Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences de Tétouan
Département de Mathématiques et Informatique

2007-2008
SMA-SMI
Algèbre S_2

CONTROLE 1 (durée : 1h30)

EXERCICE : (Questions de cours)

1. Enoncer le théorème de la base incomplète.

2. Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps K et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

(a) Rappeler la définition du noyau $\ker(f)$ de f.

(b) Montrer que : f est injective $\Longleftrightarrow \ker(f) = \{0_E\}$.

PROBLEME :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base du sous-espace $F \cap G$. Montrer qu'on peut compléter $(e_1, \ldots, e_p)$ en une base $(e_1, \ldots, e_p, a_1, \ldots, a_r)$ de F et en une base $(e_1, \ldots, e_p, b_1, \ldots, b_s)$ de G.

2. Montrer que $(e_1, \ldots, e_p, a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s)$ est une famille génératrice du sous-espace $F + G$.

3. Montrer que cette famille est libre.

4. En déduire la formule : $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.



Dans la suite, on prend $E = \mathbb{R}^4$ et on considère les vecteurs :

$$v_1 = (1,3,2,0)\,;\; v_2 = (0,5,3,3)\,;\; v_3 = (-1,2,1,3)\,;$$

$$w_1 = (1,1,-1,0)\,;\; w_2 = (2,11,7,3).$$

Soit F le sous-espace de E engendré par v_1, v_2, v_3 et soit G le sous-espace de E engendré par w_1, w_2.

5. Déterminer les dimensions de F et G.

6. Déterminer la dimension de $F \cap G$.

7. En déduire la dimension de $F + G$.

8. Quel est le rang de la famille de vecteurs $(v_1, v_2, v_3, w_1, w_2)$?

9. On considère le sous-espace vectoriel H de E défini par

$$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;/\; 5x - 3y + 2z + 3t = 0\}.$$

Montrer que $F + G = H$.

10. Donner un sous-espace supplémentaire de H dans E.

$\mathcal{FIN}$




ETUSUP.com